

DOI 10.15589/jnn20150508  
УДК 536.2  
В67

**MATHEMATICAL MODELING OF HEATING DIELECTRIC  
MATERIAL IN MICROWAVE ELECTROMAGNETIC FIELD**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРЕВА  
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА В МИКРОВОЛНОВОМ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ**

**Natalya V. Volgusheva**  
n-volgusheva@mail.ru  
ORCID: 0000-0003-0199-5890

**Н. В. Волгушева**  
канд. техн. наук, доц.

*Odessa National Academy of Food Technologies, Odessa*  
*Одесская национальная академия пищевых технологий, г. Одесса*

**Abstract.** Applicability of existing analytical models of thermal conductivity in a body under action of internal heat sources for problems of microwave heating is analysed. The analysis of approaches to modelling of microwave field interaction with the material showed that the correct mathematical model of thermal conductivity for the field of research, can be obtained based on the models of A. V. Lykov, which are based on the heat conduction equation with internal sources of heat, which can be both positive and negative. Mathematical model describing temperature field of a half-limited massive under microwave heating has been investigated.

**Keywords:** internal heat sources; mathematical model; heating; drying; temperature field; penetration depth.

**Аннотация.** Анализируется возможность применения существующих аналитических моделей теплопроводности в теле при действии внутренних источников теплоты к решению задач нагрева в микроволновом поле. Исследована математическая модель, описывающая температурное поле полуограниченного массива в условиях микроволнового нагрева.

**Ключевые слова:** внутренние источники теплоты; математическая модель; сушка; температурное поле.

**Анотація.** Аналізується можливість застосування існуючих аналітичних моделей теплопровідності в тілі при дії внутрішніх джерел теплоти до рішення завдань нагрівання в мікрохвильовому полі. Досліджено математичну модель, що описує температурне поле напівобмеженого масиву в умовах мікрохвильового нагрівання.

**Ключові слова:** внутрішні джерела теплоти; математична модель; сушіння; температурне поле.

**REFERENCES**

- [1] Arkhangel'skiy, Yu. S. *SVCH elektrotermiya* [Microwave electrothermics]. Saratov, SGTU, 1998, 408 p.
- [2] Boshkova I. L., Dementeva T. Yu. *Analiticheskoe issledovanie temperaturnogo polya v tele s nepreryvno deystvuyushchimi istochnikami teploty* [Analytical study of temperature field in a body with continuously operating heat sources]. *Sovremennye problemy kholodilnoy tekhniki i tekhnologii — Modern problems refrigeration and technology*, 2012, pp. 42–45.
- [3] Volgusheva N. V. *Kinetika sushki plotnogo sloya dispersnogo materiala (na primere grechikhi) pri razlichnykh sposobakh podvoda teploty*. Diss. of cand. of techn. sc. [Kinetics of drying of a dense layer of particulate material (for example buckwheat) with various methods of heat supply]. Odessa, 2005, 225 p.
- [4] Dementeva T. Yu. *Analiticheskoe predstavlenie protsessa mikrovolnovoy sushki zerna* [Analytical representation of the process of microwave drying of grain]. *Zbirnyk naukovykh prats CHDUCHT — Collection of Scientific Publications of CHGUFT*, 2011, pp. 17–18.
- [5] Kharrison Yang, Dzhaming Tan. *Advances in Agricultural Science and Technology*. Vol. 1. *Advances in Bio-processing Engineering*. London, World Scientific Publ., 2002, 172 p.
- [6] Kalenderyan V. A., Boshkova I. L., Volgusheva N. V. *Matematicheskie modeli teploperenosa v protsesse sushki dispersnykh materialov v plotnom dvizhushchemsya sloe pri razlichnykh sposobakh podvoda teploty* [Mathematical model of heat transfer in the drying process of dispersed materials in a dense moving layer in various ways heat supply] *Kholodilna tekhnika i tekhnologiya — Refrigeration technics and technology*. 2008, no. 11, pp. 65–68.

- [7] Kolomeytssev V. A., Komarov V. V. *Mikrovolnovye sistemy s ravnomernym obemnym nagrevom* [Microwave system with uniform volumetric heating]. Saratov, SGTU, 1997, 160 p.
- [8] Lykov A. V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conduction]. Moscow, 1967, 559 p.
- [9] Peyshi S., David S. *Matematicheskaya model protsessov sushki* [Mathematical model of drying processes]. *Mezhd. zhurnal Teplo-Massoobmena — Internation Journal Heat Mass Transfer*, 1989, vol. 32, pp. 297–310.
- [10] Radzhagopal K. R., Tao L. *Modelirovanie protsessa SVCh sushki vodnykh dielektrikov* [Modeling of the microwave drying process of aqueous dielectrics]. *Matematika. Fizika — Mathematics. Physics*, 2002, no. 53, pp. 923–948.
- [11] Rogov I. A., Nekrutman S. V. *Sverkhvysokochastotnyy nagrev pishchevykh produktov* [Microwave heating of food products]. Moscow, Agropromizdat, 1986. 351 p.
- [12] Chen P., Pey D. S. T. *Matematicheskaya model protsessov sushki* [A mathematical model of drying processes]. *Mezhd. zhurnal Teplo-Massoobmena — Internation Journal Heat Mass Transfer*, 1989, vol. 32, pp. 297–310.
- [13] Chen P., Shmidt P. S. *Integralnaya model sushki gigroskopicheskikh i negigroskopicheskikh materialov posredstvom dielektricheskogo nagreva* [An integral model for drying of hygroscopic and nonhygroscopic materials with dielectric heating]. *Tekhnologii sushki — Drying Technology*, 1990, no. 8(5), pp. 907–930.
- [14] Yavchunovskiy V. V. *Issledovanie effektivnosti vzaimodeystviya mikrovolnovogo izlucheniya s granulirovannoy dielektricheskoy sredoy*. Diss. of cand. of phys.-mat. sc. [Study of the efficiency of interaction of microwave radiation with a granular dielectric environment]. Saratov, 2006, 189 p.

### ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Метод нагрева материалов в микроволновом электромагнитном поле зарекомендовал себя как высокоэффективный в отношении скорости, энергозатрат и качества конечной продукции в процессах нагрева и сушки. Дальнейшее изучение процесса микроволнового нагрева целесообразно дополнить аналитическими исследованиями, среди которых наиболее важны данные по температуре материала, являющиеся базовыми для оценки эффективности действия микроволнового поля и влияния входных характеристик на технологический процесс. Составление математических моделей, адекватно отражающих физическую сущность протекающих явлений под действием микроволнового поля, сопряжено с определенными трудностями, связанными с многофакторностью взаимодействия электромагнитного поля с полярными диэлектриками и необходимостью при переходе к тепловой схеме исключения вторичных элементов.

### АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

При проектировании микроволновых сушилок важно располагать данными о характере изменения температуры и влагосодержания материала в процессе сушки в зависимости от времени и толщины слоя. Существующие решения уравнений тепло- и массопереноса [9, 10, 12, 13], описывающих микроволновую сушку дисперсных материалов, громоздки и сложны для практического применения и содержат коэффициенты, определение которых весьма затруднительно. Исследованию факторов, влияющих на эффективность взаимодействия СВЧ поля с диэлектрической средой, посвящена работа [14]. В ней предложена математическая модель, описывающая

распространение электромагнитных волн в гранулированном диэлектрическом слое, характеристики которого изменяются в результате протекающих в нем электродинамических и тепло- и массообменных процессов. Она включает уравнение распространения электромагнитного поля в диэлектрической среде и уравнения тепло- и массообмена с граничными и начальными условиями. Выполненные в работах [1, 7, 8] исследования опираются на математические модели тепло- и массообмена, созданные ранее для анализа закономерностей конвективного теплового обезвоживания. В частности, в работах А. В. Лыкова [8] были выведены системы уравнений тепло- и массообмена в подвергаемых тепловому воздействию объектах, которые впоследствии [11] были дополнены уравнениями распространения электромагнитных волн в диэлектрических средах. Аналитическое решение задач теплопроводности в теле в условиях действия двух источников теплоты (положительный, обусловленный преобразованием энергии электромагнитного поля в тепловую, и отрицательный, определяемый испарением) получено для полуограниченного массива при граничных условиях первого и третьего рода [2–6].

**ЦЕЛЬ СТАТЬИ** — получение корректной математической модели нагрева диэлектрического материала в микроволновом поле, в основе которой лежит уравнение теплопроводности с учетом внутренних источников теплоты, которые могут быть как положительными, так и отрицательными.

### ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

Объемный характер нагрева материала в микроволновом поле позволяет рассматривать материал как среду, в которой действуют внутренние положительные источники теплоты.

Принята однокомпонентная модель, согласно которой слой рассматривается как квазигомогенная среда с эффективными характеристиками. Математическая формулировка задачи теплопроводности в дифференциальной форме представляется следующим образом:

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \cdot \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{q_{v1}}{c \cdot \rho} + \frac{q_{v2}}{c \cdot \rho}; \quad (1)$$

$$t(x, 0) = t_0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial t(\infty, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (3)$$

$$t(0, \tau) = t_{\text{пов}} = \text{const}, \quad (4)$$

где  $t$  — температура материала,  $x$  — текущая координата,  $\tau$  — время,  $t_{\text{пов}}$  — температура поверхности материала. Принималось, что локальное (на глубине  $x$ ) значение удельной мощности положительного источника  $q_{v1}$  определялось удельной мощностью положительного источника на поверхности  $q_{v10}$  и коэффициентом ослабления  $\gamma$ :  $q_{v1} = q_{v10} \cdot \gamma$ , а изменение удельной мощности отрицательного источника учитывалось введением коэффициента  $\beta$ :  $q_{v2} = q_{v20} \cdot \beta$ .

Материал рассматривался в виде полугограниченного массива, находящегося при температуре  $t_0$ . В начальный момент времени температура поверхности принимает температуру  $t_{\text{пов}}$ , которая остается постоянной на протяжении всего процесса. Решение дифференциального уравнения (1) для заданной формы позволило получить зависимости для расчета локальных температур полугограниченного массива. Для периода нагрева материала в микроволновом поле ( $q_{v2} = 0$ ) зависимость имеет следующий вид:

$$t(x, \tau) = \left(1 - \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) t_0 + \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \cdot t_{\text{пов}} - \frac{q_{v10}}{c\rho a\gamma^2} \left[ e^{-\alpha x} - \frac{1}{2} e^{\alpha^2 a\tau - \gamma x} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} - \gamma\sqrt{a\tau} \right) + \frac{1}{2} e^{\alpha^2 a\tau + \gamma x} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} + \gamma\sqrt{a\tau} \right) - \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right] \quad (5)$$

При испарении влаги (период постоянной скорости сушки) получено следующее решение:

$$t(x, \tau) = \left(1 - \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) t_{\text{пов}} + \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \cdot t_0 - \frac{q_{v10}}{c\rho a\gamma^2} \left[ e^{-\gamma x} - \frac{1}{2} e^{\gamma^2 a\tau - \gamma x} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} - \gamma\sqrt{a\tau} \right) + \frac{1}{2} e^{\gamma^2 a\tau + \gamma x} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} + \gamma\sqrt{a\tau} \right) - \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right] - \frac{q_{v20}}{c\rho a\beta^2} \left[ e^{-\beta x} - \frac{1}{2} e^{\beta^2 a\tau - \beta x} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} - \beta\sqrt{a\tau} \right) + \frac{1}{2} e^{\beta^2 a\tau + \beta x} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} + \beta\sqrt{a\tau} \right) - \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right]. \quad (6)$$

где  $a, \lambda, c, \rho$  — соответственно коэффициенты температуропроводности, теплопроводности, удельная теплоемкость и плотность слоя материала.

Полученное решение дифференциального уравнения с принятыми условиями однозначности позволяет рассчитать локальную температуру тела как для условий исключительно нагрева в микроволновом поле, так и при удалении влаги в процессе микроволновой сушки. Следует отметить, что решения, приведенные в [8], справедливы для условия, когда температура окружающей среды (при граничном условии III рода) или температура поверхности (при граничном условии I рода) больше температуры материала:  $t_c > t_0$ . Предварительно проведенный переход к безразмерным избыточным температурам путем замены переменной с целью приведения к форме, соответствующей задаче охлаждения при условии  $t_c < t_0$ , не привел к получению данных, адекватно отражающих процесс нагрева от действия внутренних источников, при котором температура окружающей среды не превышает температуру материала. Именно такие условия реализуются при нагреве материала в микроволновом поле.

На рис. 1 приведены кривые, полученные по результатам расчетов температуры с помощью зависимости (5) при  $q_{v20} = 0$  (период прогрева). Материал — зерно пшеницы и вода. Исходные данные для расчета следующие: начальные температуры материала и среды равны:  $t_c = t_0 = 20$  °С, коэффициент поглощения воды  $\gamma_B = 125$  м<sup>-1</sup>, коэффициент поглощения зерна  $\gamma_3 = 30$  м<sup>-1</sup>.

Расчет для воды и зерна при одинаковых значениях удельной мощности внутренних источников теплоты ( $\eta \equiv A = 1$ ) показал, что температурные кривые для воды располагаются ниже кривых для зерна. Это объясняется тем, что для получения удельной мощности в зерне такого же значения, как и в воде,

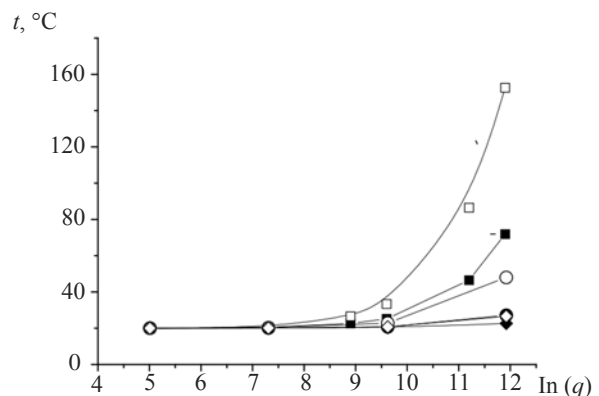


Рис. 1. Изменение температуры материала в зависимости от удельной мощности внутренних источников и вида материала:

■ — зерно,  $\eta = A, \tau = 60$  с; □ — зерно,  $\eta = A, \tau = 360$  с; ● — вода,  $\eta = A, \tau = 60$  с; ○ — вода,  $\eta = A, \tau = 360$  с; ◆ — зерно,  $\eta = B, \tau = 60$  с; ◇ — зерно,  $\eta = B, \tau = 360$  с

требуется более мощный источник микроволновой энергии, т.к. вследствие значительного расхождения значений коэффициента потерь количество энергии, преобразованной в тепловую, будет существенно отличаться. Так, для воды при 20 °С  $\epsilon'' = 82$ , для зерна ориентировочно  $\epsilon'' = 2,6$ . Для корректного сопоставления температур для воды и зерна следует учитывать значение диэлектрических характеристик материала. С этой целью целесообразно использовать данные по КПД микроволновой камеры  $\eta$ . Экспериментальные зависимости, полученные для определения КПД камеры при ее загрузке зерном, приведены в [3].

Расчет температур зерна, проведенный при  $\eta \equiv B = 0,47$  (что учитывало изменение удельной мощности внутренних источников при выходной мощности, соответствующей условиям нагрева воды в микроволновом поле), привел к верному распределению температурных кривых. В этом случае температура зерна ниже, чем температура воды, и их значения коррелируются с экспериментальными. Для всех вариантов расчета увеличение экспозиции в МВ поле приводит к увеличению температуры.

На рис. 2 приведены результаты расчета температуры материала в зависимости от координаты, отсчитываемой от поверхности массива, выполненные по зависимости (6). Материал — вода и зерно пшеницы, начальная температура равна начальной температуре материала:  $t_c = t_0 = 20$  °С. Линии 1, 2 получены для  $\tau = 60$  с, линии 3, 4 — для  $\tau = 360$  с, линии 5, 6 — для  $\tau = 600$  с.

Вследствие низких значений диэлектрических характеристик относительно характеристик воды скорость нагрева воды выше. На начальном этапе нагрева из-за большого коэффициента поглощения температура изменяется не на всех координатных точках, а на определенном расстоянии от начала координат,

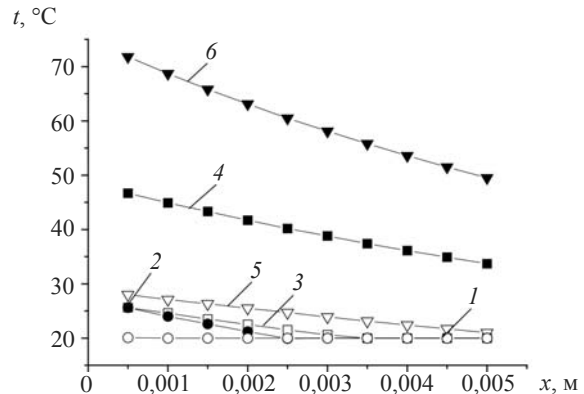


Рис. 2. Температура массива в зависимости от координаты при различной экспозиции в МВ поле:

1, 3, 5 — зерно; 2, 4, 6 — вода

за пределами которого температура остается постоянной. При увеличении экспозиции изменение температурного поля охватывает последующие слои, что связано с переносом теплоты теплопроводностью.

**ВЫВОДЫ.** Разработанная математическая модель теплопроводности в полуограниченном массиве, учитывающая действие двух источников теплоты: положительного, который может быть связан с действием микроволнового поля на материал, и отрицательного, связанного со стоком теплоты, к примеру, вследствие испарения, позволяет получать удовлетворительные данные при различном соотношении начальных температур среды и материала, а также при условии  $t_c = t_0$ . Расчет изменения температуры по глубине массива по предлагаемой математической модели показал соответствие аналитической модели реальному физическому процессу, что доказывает возможность описания нагрева материалов в микроволновом поле точными аналитическими методами.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Архангельский, Ю. С. СВЧ электротермия / Ю. С. Архангельский. — Саратов : СГТУ, 1998. — 408 с.
- [2] Бошкова, И. Л. Аналитическое исследование температурного поля в теле с непрерывно действующими источниками теплоты / И. Л. Бошкова, Т. Ю. Дементьева // Соврем. проблемы холод. техники и технологии. — О. : ОДАХ, 2012. — С. 42–45.
- [3] Волгушева, Н. В. Кинетика сушки плотного слоя дисперсного материала (на примере гречихи) при различных способах подвода теплоты : дисс... канд. техн. наук : 05.14.05 / Н. В. Волгушева. — Одесса, 2005. — 225 с.
- [4] Дементьева, Т. Ю. Аналитическое представление процесса микроволновой сушки зерна / Т. Ю. Дементьева // Проблеми енергоефект. та якості в процесах сушіння харч. сировини. Всеукраїнська наук.-практ. конф. Зб. наук. праць. — Х. : ХДУХТ, 2011. — С. 17–18.
- [5] Достижения в сельскохозяйственной науке и технологии. Том 1. Достижения в биотехнологической инженерии / Редакторы Харрисон Янг, Джаминг Тан. — Лондон : Мир науки, 2002. — 172 с.
- [6] Календерьян, В. А. Математические модели теплопереноса в процессе сушки дисперсных материалов в плотном движущемся слое при различных способах подвода теплоты / В. А. Календерьян, И. Л. Бошкова, Н. В. Волгушева // Холодильна техніка і технологія. — 2008. — № 11 (11). — С. 65–68.
- [7] Коломейцев, В. А. Микроволновые системы с равномерным объемным нагревом / В. А. Коломейцев, В. В. Комаров. — Саратов : СГТУ, 1997. — 160 с.
- [8] Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. — М., 1967. — 559 с.

- [9] **Пейши, С.** Математическая модель процессов сушки [Текст] / С. Пейши, С. Давид // Межд. журнал тепло-массообмена. — 1989. — Вып. 32. — С. 297–310.
- [10] **Раджагопал, К.** Моделирование процесса СВЧ сушки водных диэлектриков / К. Р. Раджагопал, Л. Тао // Математика. Физика. — 2002. — № 53. — С. 923–948.
- [11] **Рогов, И. А.** Сверхвысокочастотный нагрев пищевых продуктов / И. А. Рогов, С. В. Некрутман. — М. : Агропромиздат, 1986. — 351 с.
- [12] **Чен, П.** Математическая модель процессов сушки [Текст] / П. Чен, Д. С. Т. Пэй // Межд. журнал тепло-массообмена. — 1989. — Вып. 32. — С. 297–310.
- [13] **Чен, П.** Интегральная модель сушки гигроскопических и негигроскопических материалов посредством диэлектрического нагрева / П. Чен, П. С. Шмидт // Технологии сушки. — 1990. — № 8(5). — С. 907–930.
- [14] **Явчуновский, В. В.** Исследование эффективности взаимодействия микроволнового излучения с гранулированной диэлектрической средой : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Явчуновский В. В. ; ГОУ ВПО Саратовский гос. ун-т им. Н. Г. Чернышевского. — Саратов, 2006. — 189 с.

---

© Н. В. Волгушева

Надійшла до редколегії 24.09.2015

Статтю рекомендує до друку член редколегії ЗНП НУК  
д-р техн. наук, проф. *М. Р. Ткач*